

ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG CAO ĐẲNG LÝ TỰ TRỌNG THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH



GIÁO TRÌNH TOÁN 3

NGÀNH: Dùng cho các ngành đào tạo
BẬC: Trung cấp chuyên nghiệp
Cao đẳng nghề

Tài liệu lưu hành nội bộ
Thành phố Hồ Chí Minh, tháng 08 năm 2020



MỤC LỤC

CHƯƠNG I. GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	3
§1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC	4
§2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC	9
§3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN.....	11
§4. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP	13
ÔN TẬP CHƯƠNG I	16
CHƯƠNG II: TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT.....	17
§ 1. QUY TẮC ĐẾM.....	17
§2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP	19
§3. NHỊ THỨC NIU-TƠN	21
§4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ.....	23
§5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ.....	25
ÔN TẬP CHƯƠNG II	27

CHƯƠNG I. GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

☞ **Nhắc lại một số công thức cơ bản đã học:**

1. Công thức lượng giác cơ bản

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$* 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad (\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

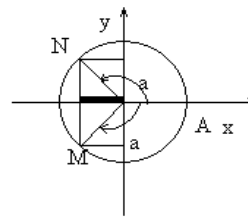
$$* 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$$

$$* \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}, \quad (\alpha \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z})$$

2. Giá trị lượng giác của các góc (cung) có liên quan đặc biệt

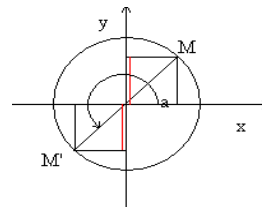
a/ Hai góc đối nhau

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(-\alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$



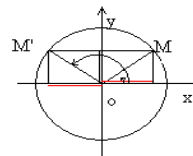
b/ Hai góc hơn kém nhau π

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi + \alpha) &= \tan \alpha \\ \cot(\pi + \alpha) &= \cot \alpha \end{aligned}$$



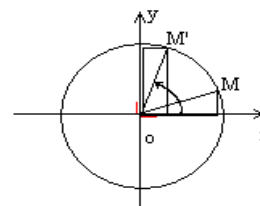
c/ Hai góc bù nhau

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \cot(\pi - \alpha) &= -\cot \alpha \end{aligned}$$



d/ Hai góc phụ nhau

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cos \alpha \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \sin \alpha \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) &= \cot \alpha \end{aligned}$$



§1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

I. LÝ THUYẾT

1. Công thức cộng

a. Công thức cộng đối với sin và cosin

$$\begin{aligned}\cos(a \pm b) &= \cos a \cdot \cos b \mp \sin a \cdot \sin b \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cdot \cos b \pm \sin b \cdot \cos a\end{aligned}$$

Ví dụ 1: Tính $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b. Công thức cộng đối với tan

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$$

Ví dụ 2: $\tan \frac{5\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 + \sqrt{3}$

2. Công thức nhân đôi

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}\end{aligned}$$

Chú ý: a) $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$

b) $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ (hạ bậc)

Ví dụ 3: Cho $\cos \alpha = \frac{-12}{13}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$.

Giải

Ta có:

$$* \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \left(\frac{-12}{13} \right)^2 - 1 = \frac{119}{169};$$

$$* \sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha = 1 - \left(\frac{119}{169} \right)^2 = \frac{14400}{169^2}.$$

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $180^\circ < 2\alpha < 360^\circ \Rightarrow \sin 2\alpha < 0$. Vậy: $\sin 2\alpha = -\frac{120}{169}$.

3. Công thức biến đổi tích thành tổng và biến tổng thành tích**3.1. Công thức biến đổi tích thành tổng**

$$\begin{aligned}\cos a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \sin a \cdot \sin b &= -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)] \\ \sin a \cdot \cos b &= \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]\end{aligned}$$

Ví dụ 4: Tính $\sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{\pi}{24}$ **Giải**

Ta có:

$$\sin \frac{5\pi}{24} \cdot \sin \frac{\pi}{24} = -\frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{24} \right) - \cos \left(\frac{5\pi}{24} - \frac{\pi}{24} \right) \right] = -\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{4} (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

3.2. Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\begin{aligned}\cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2} \\ \sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \\ \sin a - \sin b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}\end{aligned}$$

Ví dụ 5: Rút gọn

$$A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}$$

Giải

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 2x}{\cos x + \cos 3x + \cos 2x} \\ &= \frac{2 \sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x}{2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x} \\ &= \frac{\sin 2x(2 \cos x + 1)}{\cos 2x(2 \cos x + 1)} = \tan 2x\end{aligned}$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG**Bài 1:** Tính $\sin 75^\circ$ **Giải**

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

Bài 2: Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$.

Giải

$$* \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}.$$

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$* \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 = \frac{7}{25}$$

$$* \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

Bài 3: Chứng minh rằng: $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x)$

Giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \cos^4 x + \sin^4 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x \\ &= 1 - 2(\sin x \cdot \cos x)^2 = 1 - 2\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2x) \quad \square \end{aligned}$$

Bài 4: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\cos a + \cos 3a + \cos 5a}{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}$

Giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{\cos a + \cos 3a + \cos 5a}{\sin a + \sin 3a + \sin 5a} = \frac{(\cos a + \cos 5a) + \cos 3a}{(\sin a + \sin 5a) + \sin 3a} \\ &= \frac{2\cos 3a \cdot \cos 2a + \cos 3a}{2\sin 3a \cdot \cos 2a + \sin 3a} = \frac{\cos 3a(2\cos 2a + 1)}{\sin 3a(2\cos 2a + 1)} = \cot 3a \end{aligned}$$

BÀI TẬP

Bài 1: Tính giá trị lượng giác của góc $\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{8}$

Bài 2: Cho $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$.

Bài 3: Cho $\cos 2\alpha = -\frac{12}{13}$, với $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cos\alpha$, $\sin\alpha$

Bài 4: Biết $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Tính giá trị lượng giác của góc 2α và góc $\frac{\alpha}{2}$.

Bài 5: Chứng minh:

$$a/ \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ = \sin 75^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{1}{4} \qquad b/ \cos 75^\circ \cdot \sin 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$$

$$c/ \sin 75^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$$

$$d/ \sin \frac{11\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})$$

Bài 6: Chứng minh rồi dùng máy tính kiểm nghiệm lại gần đúng kết quả

$$a/ \cos 10^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$b/ \sin 10^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 70^\circ = \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}$$

Bài 7: Rút gọn các biểu thức sau

$$A = \frac{\cos a - \cos 5a}{\sin 5a - \sin a}; \quad B = \frac{\sin 3x + 2 \sin 5x + \sin 7x}{\cos 3x + 2 \cos 5x + \cos 7x}$$

Bài 8: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x:

$$E = \cos^2(a + x) + \cos^2 x - 2 \cos a \cdot \cos x \cdot \cos(a + x)$$

$$F = \sin 4x \cdot \sin 10x - \sin 11x \cdot \sin 3x - \sin 7x \cdot \sin x$$

Bài 9: Chứng minh rằng:

$$a/ \sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a;$$

$$b/ \cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$c/ \sin a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \frac{1}{4} \sin 3a; \quad d/ \cos a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - a\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \frac{1}{4} \cos 3a$$

Áp dụng tính: $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ$ và $\tan 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \tan 80^\circ$

Bài 10: Chứng minh rằng:

$$a/ \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{5\pi}{7} = -\frac{1}{8}$$

$$b/ \sin 6^\circ \cdot \sin 42^\circ \cdot \sin 66^\circ \cdot \sin 78^\circ = \frac{1}{16}$$

$$c/ \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$$

$$d/ \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} = 0$$

Bài 11: Chứng minh:

$$a/ \sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$b/ \sin a - \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$c/ \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$$

$$d/ \tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \frac{1 + \tan a}{1 - \tan a}$$

Bài 12: Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x:

$$A = \frac{\cos^3 x - \cos 3x}{\cos x} + \frac{\sin^3 x + \sin 3x}{\sin x};$$

$$B = \sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^4 x + \cos^4 x) + \frac{1}{8} \cos^4 2x$$

Bài 13: Chứng minh rằng:

$$a/ \cos^6 x + \sin^6 x = \frac{3}{8} \cos 4x + \frac{5}{8}$$

$$b/ 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 = \cos 4x$$

$$c/ \cot x - \tan x - 2 \tan 2x - 4 \tan 4x = 8 \cot 8x$$

$$d/ \tan^2 x + \cot^2 x = \frac{6 + 2 \cos 4x}{1 - \cos 4x}$$

Bài 14: Cho ΔABC có A, B, C là 3 góc trong. Chứng minh rằng:

$$a / \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

$$b / \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$c / \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

$$d / \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1 = -4 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$$

Bài 15: Chứng minh rằng:

a/ Nếu ΔABC có 3 góc A, B, C thỏa mãn $\sin A = \cos B + \cos C$ thì tam giác ABC vuông.

b/ Nếu ΔABC có 3 góc A, B, C thỏa mãn $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$ thì tam giác ABC cân.

Bài 16: Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính: $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$

Bài 17: Tính giá trị lượng giác của góc $\frac{7\pi}{12}$

Bài 18: Cho a, b là góc nhọn với $\cos a = \frac{15}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$. Tính $\sin(a - b)$, $\tan(a - b)$.

Bài 19: Cho $\sin a = \frac{1}{3}$, $\sin b = \frac{1}{2}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < b < \pi$. Tính $\sin(a + b)$.

Bài 20: Rút gọn các biểu thức sau:

$$A = \frac{\cos a + \cos 3a + \cos 5a}{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}; \quad B = \frac{\sin 2x - 2 \sin 4x + \sin 6x}{\cos 2x - 2 \cos 4x + \cos 6x}$$

$$C = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}; \quad D = 4 \cos \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{\pi - x}{3} \cdot \cos \frac{\pi + x}{3}$$

Bài 21: Chứng minh rằng:

$$a / \sin(a + b) \cdot \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$$

$$b / \frac{\tan a + \tan b}{\tan a - \tan b} = \frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)}$$

$$c / \text{Nếu } \sin(2a + b) = 3 \sin b \text{ thì } \tan(a + b) = 2 \tan a$$

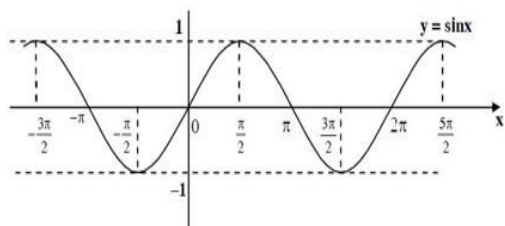
Bài 22: Cho $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$. Tính các hàm số lượng giác của α .

§2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

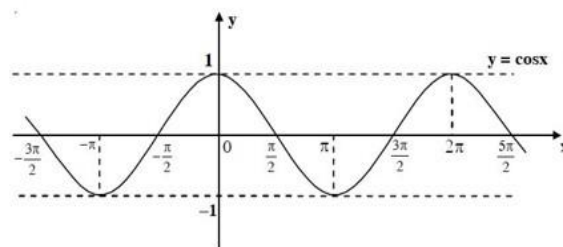
LÍ THUYẾT

1. Hàm số $y = \sin x$

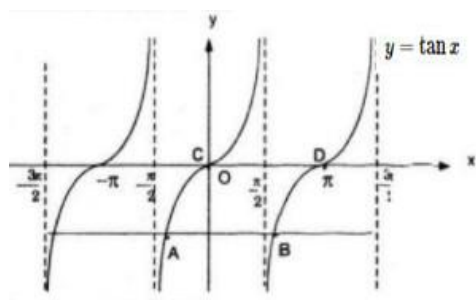
- Tập xác định: $\mathbb{R}$
- Tập giá trị $[-1;1]$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$
- Đồ thị

2. Hàm số $y = \cos x$

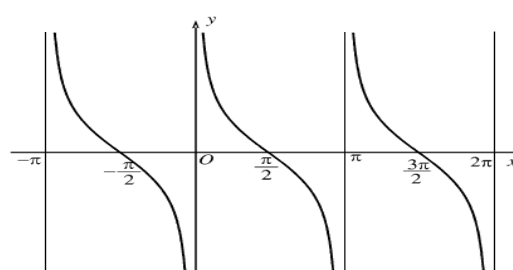
- Tập xác định: $\mathbb{R}$
- Tập giá trị $[-1;1]$
- Là hàm số chẵn
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$
- Đồ thị

3. Hàm số $y = \tan x$

- Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- Là hàm số lẻ
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$
- Đồ thị

4. Hàm số $y = \cot x$

- Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$
- Là hàm số chẵn
- Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$
- Đồ thị



BÀI TẬP**Bài 1:** Tìm tập xác định của các hàm số:

1. $y = \sin x + \cos x$ 2. $y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\cos x}$ 3. $y = \sqrt{3 - \sin x}$ 4. $y = \tan\left(2 + \frac{\pi}{3}\right)$
5. $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ 6. $y = \tan x + \cot x$ 7. $y = \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$ 8. $y = 5\sin x + 3\cos x$
9. $y = \frac{1}{\tan x}$ 10. $y = \frac{1}{\cot x}$

Bài 2: Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

1. $y = 2 \cos x + 3$; 2. $y = 3 + \frac{1}{8} \sin^2 2x$; 3. $y = 2 \cos^2 x - 2$; 4. $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$
5. $y = \sqrt{2 + \cos 2x}$; 6. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; 7. $y = \sin^6 x + \cos^6 x$;
8. $y = 1 - \sin^4 x - \cos^4 x$
9. $y = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$; 10. $y = \cos^3 x \cdot \sin x - \sin^3 x \cdot \cos x$

Bài 3: Tính giá trị của các hàm số sau:

1. Cho $\cos x = -\frac{3}{5}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\sin x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.
2. Cho $\sin x = \frac{1}{3}$, $90^\circ < x < 180^\circ$. Tính $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$.
3. Cho $\tan a = 2$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Tính $\cot a$, $\cos a$, $\sin a$, $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài 4: Tính giá trị của các biểu thức sau:

1. Cho
- $\tan x = 5$
- . Tính:

$$A = \frac{\sin x - \cos x}{2 \sin x + 6 \cos x}; \quad B = \frac{3 \cos x - 18 \sin x}{\sin x - 2 \cos x}.$$

2. Cho
- $\cot a = -2$
- . Tính:

$$C = \frac{4 \cos a - 3 \sin a}{4 \sin a + \cos a}; \quad D = \frac{1 - \sin a \cos a + \sin^2 a}{2 \sin^2 a - 5 \cos^2 a}.$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I. LÝ THUYẾT

1. Phương trình lượng giác cơ bản

Dạng phương trình:

$$1. \sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k2\pi \\ x = \pi - a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \cos x = \cos a \Leftrightarrow x = \pm a + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$3. \tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (Điều kiện: } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

$$4. \cot x = \cot a \Leftrightarrow x = a + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (Điều kiện: } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi)$$

Trường hợp đặc biệt:

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

1. Giải phương trình: $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Giải

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Giải phương trình: $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Giải

$$\begin{aligned}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

3. Giải phương trình: $\tan x = \sqrt{3}$

Giải

$$\begin{aligned}\tan x = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

4. Giải phương trình: $\cot x = \sqrt{3}$

Giải

$$\begin{aligned}\cot x = \sqrt{3} &\Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{6} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

BÀI TẬP

Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$1) 2 \sin x - 1 = 0$$

$$2) \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \sin(x + \frac{\pi}{6})$$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$1) 2 \cos x - \sqrt{2} = 0$$

$$2) \cos(6x + \frac{\pi}{3}) = \cos(2x - \frac{\pi}{6})$$

$$3) \cos(x + \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2} = 0$$

$$4) 2 \cos x + \sqrt{3}$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$$1) \tan x + \sqrt{3} = 0$$

$$2) 4 \cos^2 3x - 1 = 0$$

$$3) \sqrt{3} \cot x + 1 = 0$$

$$4) \tan 2x \cdot \cot 3x = 1$$

$$5) \sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0.$$

§4. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

I. LÝ THUYẾT

1. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác

Dạng phương trình:

$$a.\sin^2 x + b.\sin x + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } a \neq 0)$$

$$a.\cos^2 x + b.\cos x + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } a \neq 0)$$

$$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } a \neq 0)$$

$$a.\cot^2 x + b.\cot x + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R} \text{ và } a \neq 0)$$

Đặt $t = \sin x$ hay $t = \cos x$, với điều kiện: $-1 \leq t \leq 1$

Đặt $t = \tan x$, với điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Đặt $t = \cot x$, với điều kiện: $x \neq k\pi$.

Sau đó đưa các phương trình đã cho trở thành phương trình bậc hai theo t .

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

$$1) \quad 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$$

$$2) \quad \sqrt{3}\tan^2 x - 2\tan x - \sqrt{3} = 0$$

Giải

$$1) \quad \text{Đặt: } t = \cos x, t \in [-1, 1]$$

$$pt \Leftrightarrow 2t^2 - 5t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \quad (n) \\ t = 3 \quad (l) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad \sqrt{3}\tan^2 x - 2\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} \\ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2. Phương trình bậc nhất theo $\sin x, \cos x$

Dạng phương trình: $a\sin x + b\cos x = c$

Điều kiện tồn tại nghiệm: $a^2 + b^2 \geq c^2$

☞ **Phương pháp giải:** Chia hai vế của phương trình cho: $\sqrt{a^2 + b^2}$

Phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \alpha + \cos x \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ với } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \sin \beta \quad (\text{đây là phương trình lượng giác cơ bản đã biết}$$

cách giải)

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = -\sqrt{3}$

Giải

$$\text{Pt} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x \cos \frac{\pi}{3} - \cos 3x \sin \frac{\pi}{3} = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

3. Phương trình dạng đưa về phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác

Dạng: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ ($a \neq 0$)

Phương pháp 1: Nhận xét $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ không phải là nghiệm của phương trình.

Chia hai vế của phương trình cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

Phương pháp 2: Dùng công thức hạ bậc đưa phương trình đã cho về phương trình bậc nhất theo $\sin x, \cos x$.

$$a \frac{(1 - \cos 2x)}{2} + b \frac{\sin 2x}{2} + c \frac{(1 + \cos 2x)}{2} = 0$$

Chú ý: Nếu phương trình có dạng: $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x + d = 0$ thì ta thay $d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$ rồi đưa về dạng trên.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

Giải

Nhận thấy thay $\cos x = 0$ vào phương trình ta suy ra được: $\sin^2 x = 0$ (vô lý),

vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Chia hai vế cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$3\tan^2 x - 4\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan \frac{1}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

BÀI TẬP**Bài 1:** Giải các phương trình sau:

1) $4\sin^2 x + 8\sin x + 3 = 0$

3) $2\sin^2 x - (2 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$

5) $\tan^2 x - (\sqrt{3} + 1)\tan x + \sqrt{3} = 0$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

1) $\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

1) $\sin^2 x - 8\sin x \cdot \cos x + 7\cos^2 x = 0$

3) $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$

5) $5\sin^2 x + \sin 2x + 4\cos^2 x = 0$

2) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

4) $\sin^2 x + (\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{3} = 0$

6) $\sin x + \cos x = 1$

2) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

4) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 1$

2) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = 1$

4) $6\sin^2 x + 7\sqrt{3}\sin 2x - 8\cos^2 x + 6 = 0$

ÔN TẬP CHƯƠNG I



Bài 1: Giải các phương trình sau:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + \sqrt{3} \sin(\pi - 2x) = 1$$

$$2) 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$3) 2\sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 3$$

$$4) 2\cos 2x = \sqrt{2} (\cos x - \sin x)$$

$$5) \sin 4x + \cos 4x = \sqrt{2} \sin 5x$$

$$6) \sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = 2\sin 7x$$

$$7) 2\cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x = \sqrt{2} + 1$$

$$8) \cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3} (\cos 5x - \sin 7x)$$

Bài 2: Giải các phương trình sau:

$$1) 2\sin^2 x + 5\cos x + 1 = 0$$

$$3) 4\cos^5 x \cdot \sin x - 4\sin^5 x \cdot \cos x = \sin^2 4x$$

$$5) 4\sin^2 x - 2(\sqrt{3} + 1)\sin x + \sqrt{3} = 0$$

$$7) \tan^2 x + \cot^2 x = 2$$

$$2) 4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$$

$$4) \tan^2 x + (1 - \sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$6) 4\cos^3 x + 3\sqrt{2} \sin 2x = 8\cos x$$

$$8) \cot^2 2x - 4\cot 2x + 3 = 0$$

Bài 3: Giải các phương trình sau:

$$1) 4\sin^2 3x + 2(\sqrt{3} + 1)\cos 3x - \sqrt{3} = 4$$

$$3) 4\cos^2(2 - 6x) + 16\cos^2(1 - 3x) = 13$$

$$5) \frac{3}{\cos x} + \tan^2 x = 9$$

$$7) \frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$$

$$9) \cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$$

$$2) \cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$$

$$4) \frac{1}{\cos^2 x} - (3 + \sqrt{3})\tan x - 3 + \sqrt{3} = 0$$

$$6) 9 - 13\cos x + \frac{4}{1 + \tan^2 x} = 0$$

$$8) \frac{1}{\cos^2 x} + 3\cot^2 x = 5$$

$$10) 2\cos 2x + \tan x = \frac{4}{5}$$

CHƯƠNG II: TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

§ 1. QUY TẮC ĐẾM

I. LÝ THUYẾT

1. Quy tắc cộng: Một công việc hoàn thành bởi một trong hai hành động, nếu hành động này có m cách thực hiện, hành động kia có n cách thực hiện không trùng với bất kì cách nào của hành động thứ nhất thì công việc đó có $m + n$ cách thực hiện.

Ví dụ 1: Một bài toán nếu giải bằng phương pháp đại số có ba cách giải, giải bằng phương pháp hình học có hai cách giải. Để giải được bài toán đó có mấy cách giải?

Giải

Chọn một cách giải bài toán có: $3 + 2 = 5$ (cách giải)

Ví dụ 2: Một lớp học có 18 sinh viên giỏi toán, 20 sinh viên giỏi anh văn, trong đó có 10 sinh viên giỏi cả toán và anh văn. Hỏi có mấy cách chọn một sinh viên giỏi toán hoặc anh văn?

Giải

Chọn sinh viên giỏi toán: 18 (cách)

Chọn sinh viên giỏi anh văn: $20 - 10 = 10$ (cách) (Vì có 10 sinh viên đã được chọn)

Theo quy tắc cộng: $18 + 10 = 28$ (cách)

2. Quy tắc nhân: Một công việc được hoàn thành bởi hai hành động liên tiếp. Nếu có m cách thực hiện hành động thứ nhất và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện hành động thứ hai thì có $m.n$ cách hoàn thành công việc đó.

Ví dụ 3: Để đi từ A đến C ta bắt buộc phải qua điểm B. Có 2 đường khác nhau để đi từ A đến B và có 3 đường khác nhau để đi từ B đến C.

Hỏi có bao nhiêu cách đi từ A đến C?

Giải

Đi từ A đến B có 2 cách chọn.

Đi từ B đến C có 3 cách chọn.

Theo quy tắc nhân: $2.3 = 6$ cách khác nhau để đi từ A đến C.



Ví dụ 4: Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5\}$. Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau, lấy từ các chữ số trong tập A?

Giải

$X = \overline{abc}$ là số tự nhiên chẵn có ba chữ số khác nhau được lấy từ A

Trường hợp 1: $c = 0$ nên c có 1 cách chọn

$a \neq 0$ nên a có 5 cách chọn

$b \neq a, c$ nên b có 4 cách chọn

Theo qui tắc nhân: $4.5 = 20$ số X (có chữ số tận cùng $c = 0$)

Trường hợp 2: $c = 2$ hay $c = 4$ nên c có 2 cách chọn

$a \neq 0$, c : nên a có 4 cách chọn

$b \neq a, c$: nên b có 4 cách chọn

Theo qui tắc nhân: $2.4.4 = 32$ số X (có chữ số tận cùng là $c = 2$ hay $c = 4$)

Vậy tổng hai trường hợp ta được 52 số X cần tìm.

BÀI TẬP

Bài 1: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

- a) Hai chữ số ;
- b) Ba chữ số khác nhau.

Bài 2: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm:

- a) Hai chữ số;
- b) Ba chữ số khác nhau;
- c) Số tự nhiên đó là số chẵn có 3 chữ số khác nhau.

Bài 3: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

- a) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 4 chữ số khác nhau;
- b) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và số tự nhiên đó chia hết cho 5;
- c) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và số tự nhiên đó lớn 2000.

§2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

I. LÝ THUYẾT

1. Hoán vị

❖ **Phép toán giai thừa:** $n! = 1.2.3...$

Quy ước: $0! = 1$

Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử. Mỗi kết quả của sự sắp xếp n phần tử của tập A được gọi là *hoán vị của n phần tử*. Số hoán vị của n phần tử được kí hiệu là: P_n

Công thức tính: $P_n = A_n^n = n!$

Ví dụ 1: Một bàn có 5 học sinh. Hỏi có mấy cách xếp chỗ ngồi?

Giải

Mỗi cách xếp chỗ của 5 học sinh ở một bàn là một hoán vị của 5 phần tử.

Do đó, số cách sắp xếp là: $P_5 = 5! = 120$.

Ví dụ 2: Từ các chữ số 1, 3, 4. Hỏi thành lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau?

Giải

Mỗi số tự nhiên được thành lập là một hoán vị của các chữ số 1, 2, 3.

Vậy số tự nhiên được thành lập là $3! = 1.2.3 = 6$.

2. Chỉnh hợp

Định nghĩa: Chỉnh hợp chập k của n phần tử ($k \leq n$) là một bộ (nhóm) có thứ tự gồm k phần tử khác nhau được lấy từ n phần tử đã cho.

Số chỉnh hợp chập k của n phần tử kí hiệu là: A_n^k

Công thức tính: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)...(n-k+1)$

Ví dụ 3: Cho 4 chữ số 1, 2, 3, 4. Có bao nhiêu cách lập một số có 3 chữ số khác nhau từ các chữ số trên?

Giải

Mỗi số được thành lập có 3 chữ số khác nhau từ 4 chữ số trên là một chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử.

Do đó, số các chữ số được thành lập là: $A_4^3 = 24$.

Ví dụ 4: Có bao nhiêu cách sắp xếp 4 người vào một cái bàn có 6 chỗ ngồi?

Giải

Ta thấy sắp 4 người vào bàn có 6 chỗ ngồi chính là lấy 4 vị trí trong 6 vị trí và có kể thứ tự. Vậy mỗi cách sắp xếp là một chỉnh hợp chập 4 của 6 phần tử nên số cách sắp xếp chính là $A_6^4 = 360$ cách khác nhau.

3. Tổ hợp

Định nghĩa: Tổ hợp chập k của n phần tử ($k \leq n$) là một nhóm không phân biệt thứ tự, gồm k phần tử khác nhau chọn từ n phần tử đã cho.

Số tổ hợp chập k của n phần tử kí hiệu là C_n^k

Công thức tính:
$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Ví dụ 5: Mỗi đề thi gồm có 5 câu hỏi được lấy trong 50 câu hỏi cho trước. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi khác nhau?

Giải

Số đề thi có thể lập được là: $C_{50}^5 = \frac{50!}{(50-5)!5!} = 2118760$

Ví dụ 6: Một tập vé xổ số có 50 tờ vé số, trong đó có 9 tờ vé số trúng thưởng. Một người lấy ngẫu nhiên ra 5 tờ vé số. Hỏi có bao nhiêu khả năng trong 5 tờ vé số đó:

- Có 5 tờ vé số đều trúng thưởng?
- Có 2 tờ vé số trúng thưởng?
- Không có tờ vé số nào trúng thưởng?

Giải

- Số khả năng trong 5 tờ vé số lấy ra cả 5 tờ vé số đều trúng thưởng là $C_9^5 = 126$.
- Số khả năng có 2 tờ vé số trúng thưởng: $C_9^2 C_{41}^3 = 383760$.
- Không có tờ vé số nào trúng thưởng: $C_{41}^5 = 749398$.

BÀI TẬP

Bài 1: Tìm n biết

- $A_n^2 = 12$
- $A_n^2 - A_n^1 = 3$
- $C_n^4 - C_n^3 = \frac{5}{4} A_{n-1}^2$
- $\frac{P_n}{P_{n-2}} = 20$

Bài 2: Có 4 nam và 4 nữ, có bao nhiêu cách sắp xếp thành một hàng:

- Tùy ý;
- Nam, nữ xen kẽ với nhau;
- Nữ trước nam sau.

Bài 3: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lập số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau:

- Hỏi có bao nhiêu số;
- Bao nhiêu số chẵn và bao nhiêu số lẻ.

Bài 4: Có bảy bông hoa màu khác nhau và 3 cái bình khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách cắm ba bông hoa vào ba bình (Mỗi bình chỉ cắm mỗi hoa)

Bài 5: Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

Bài 6: Trong mặt phẳng, cho 6 điểm phân biệt sao cho không có 3 điểm thẳng hàng:

- Hỏi lập được bao nhiêu đoạn thẳng từ các điểm đó?
- Hỏi lập được bao nhiêu véc tơ mà điểm đầu và điểm cuối từ 6 điểm đó?
- Hỏi lập được bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của tam giác là từ 6 điểm đó?

§3. NHỊ THỨC NIU-TƠN

I. LÝ THUYẾT

1. Công thức nhị thức Niu – Tơn

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

(a, b là các số thực; n là số tự nhiên)

☞ **Chú ý:** a) Trong khai triển nhị thức Niu-Tơn số các hạng tử là $n+1$;

b) Các hạng tử có số mũ của a giảm dần từ n đến 0, số mũ của b tăng dần từ 0 đến n, nhưng tổng số mũ của a và b luôn luôn bằng n;

c) Các hệ số của mỗi cặp hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau;

d) Số hạng thứ $(k+1)$ trong khai triển là: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$.

2. Tam giác Pascal: (xem thêm)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
 \end{array}$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Khai triển biểu thức $(x + y)^6$

Giải

Theo công thức:

$$\begin{aligned}
 (x + y)^6 &= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 y + C_6^2 x^4 y^2 + C_6^3 x^3 y^3 + C_6^4 x^2 y^4 + C_6^5 x y^5 + C_6^6 y^6 \\
 &= x^6 + 6x^5 y + 15x^4 y^2 + 20x^3 y^3 + 15x^2 y^4 + 6x y^5 + y^6
 \end{aligned}$$

Bài 2: Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển: $(3x - 2)^5$

Giải

Số hạng tổng quát của khai triển là: $T_{k+1} = C_5^k (3x)^{5-k} (-2)^k = C_5^k (3)^{5-k} (-2)^k x^{5-k}$

Vì số hạng cần tìm chứa x^3 nên: $5 - k = 3 \Leftrightarrow k = 2$

Vậy hệ số cần tìm là: $C_5^2 3^{5-2} (-2)^2 = 1080$.

BÀI TẬP**Bài 1:** Khai triển các biểu thức sau:

a) $(x+3)^4$

b) $(x-y)^5$

c) $(2x+3y)^5$

d) $\left(x - \frac{3}{x}\right)^6$

Bài 2: Hãy tìm:

a) Số hạng thứ 6 trong khai triển: $(3-x)^{10}$

b) Tìm hệ số của số hạng thứ 4 trong khai triển: $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{15}$

Bài 3: Hãy tìm

a) Số hạng chứa x^7 trong khai triển: $(1-x)^{12}$

b) Tìm hệ số của số hạng chứa x^3 trong khai triển: $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^6$

c) Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển: $\left(x^2 - \frac{4}{x}\right)^6$

Bài 4: Tìm số hạng không chứa x trong mỗi khai triển:

a) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^{15}$

b) $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^{18}$

c) $\left(2x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{15}$

d) $\left(2x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^{10}$

e) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{12}$

f) $\left(2x + \frac{1}{x^3}\right)^7$

§4. PHÉP THỬ VÀ BIẾN CỐ

I. LÝ THUYẾT

1. Phép thử không gian mẫu

- ❖ **Phép thử:** Những hành động mà kết quả của nó không thể dự báo trước được gọi là *phép thử ngẫu nhiên*.
- ❖ **Không gian mẫu:** Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là *không gian mẫu của phép thử đó*. Ký hiệu: Ω (ômêga).

2. Biến cố: Các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là *biến cố*.

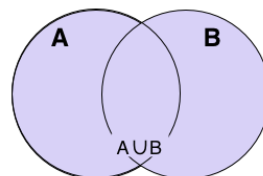
- A là biến cố thì $A \subset \Omega$
- Tập $\emptyset$ (rỗng) được gọi là *biến cố không thể*.
- Tập Ω gọi là *biến cố chắc chắn*.

Ví dụ 1:

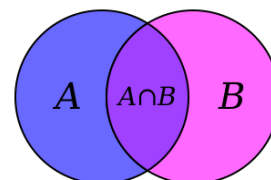
- i) Tung đồng tiền lên là một phép thử. Đồng tiền lật mặt nào đó (sấp, ngửa) là một biến cố. Tập hợp các kết quả của phép thử là không gian mẫu $\Omega = \{S; N\}$;
- ii) Gieo một con súc sắc là phép thử. Kết quả khi gieo là biến cố, không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

3. Các phép toán trên các biến cố

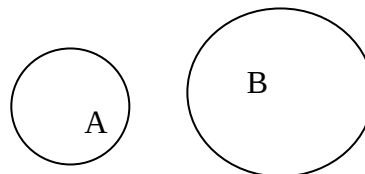
- ❖ **Biến cố đối:** A là biến cố liên quan đến phép thử. Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là *biến đối của A*, kí hiệu: $\bar{A}$.
- ❖ **Hợp, giao của hai biến cố:** A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử.
 - $A \cup B$ gọi là *hợp của hai biến cố A và B*, biến cố này xảy ra khi A xảy ra hoặc B xảy ra.



- $A \cap B$ gọi là *giao của hai biến cố A và B*, biến cố này xảy ra khi A và B đồng thời xảy ra. Biến cố $A \cap B$ còn được viết $A.B$.



- Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì ta nói A và B là hai biến cố xung khắc.



Ví dụ 2: Xét phép thử khi gieo một đồng tiền hai lần với các biến cố:

A: “Kết quả của hai lần gieo như nhau”

B: “Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp”

C: “Lần thứ hai xuất hiện mặt sấp”

D: “Lần đầu xuất hiện mặt sấp”

Giải

Tacó: $A = \{SS, NN\}$; $B = \{SN, NS, SS\}$; $C = \{NS\}$; $D = \{SS, SN\}$

Từ đó:

$$C \cup D = \{SS, SN, NS\} = B;$$

$$A \cap D = \{SS\}.$$

BÀI TẬP

Bài 1: Gieo một đồng tiền ba lần:

a) Mô tả không gian mẫu

b) Xác định các biến cố

A: “Lần thứ hai xuất hiện mặt sấp”

B: “Mặt sấp xảy ra đúng một lần”

C: “Mặt ngửa xảy ra ít nhất một lần”

Bài 2: Gieo một con súc sắc hai lần:

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố:

A: “Lần đầu xuất hiện mặt sáu chấm”

B: “Tổng số chấm của hai lần gieo là tám”

C: “Số chấm hai lần gieo giống nhau”.

Bài 3: Một hộp chứa 4 cái thẻ được đánh số 1,2,3,4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ:

a) Mô tả không gian mẫu;

b) Xác định các biến cố sau:

A: “Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn”;

B: “Tích các số trên hai thẻ là chẵn”.

§5. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

I. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa xác suất theo cổ điển: Giả sử phép thử có n biến cố đồng khả năng có thể xảy ra, trong đó có m biến cố đồng khả năng thuận lợi cho biến cố A . Khi đó xác suất của biến cố A , kí hiệu $P(A)$.

Công thức:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

☞ **Chú ý:** - $n(A)$: số biến cố thuận lợi cho A ;

- $n(\Omega)$: số tất cả các biến cố có thể xảy ra của phép thử.

2. Tính chất của xác suất và công thức tính xác suất

a) $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$;

b) $0 \leq P(A) \leq 1$ với mọi biến cố A ;

c) Nếu $A \subset B$ thì $P(A) \leq P(B)$;

d) Nếu A, B xung khắc ($A \cdot B = \emptyset$) thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

e) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

3. Các biến cố độc lập và công thức nhân xác suất

- Nếu biến cố A xảy ra không ảnh hưởng đến việc tính xác suất của biến cố B thì ta nói hai biến cố A, B độc lập.

- A, B độc lập khi và chỉ khi $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Ví dụ 1: Hai xạ thủ cùng bắn súng vào một cái bia, xác suất bắn trúng của hai xạ thủ lần lượt là 0,6; 0,8. Tính xác suất hai xạ thủ cùng bắn trúng bia.

Giải

Gọi A, B lần lượt là hai biến cố của hai xạ thủ bắn trúng bia.

Rõ ràng A, B độc lập.

$A \cdot B$ là biến cố hai xạ thủ cùng bắn trúng bia.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48.$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1: Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất xuất hiện mặt chẵn.

Giải

Gọi A_i là biến cố xuất hiện mặt i chấm và A là biến cố xuất hiện mặt chẵn thì

$$A = A_2 + A_4 + A_6$$

Ta thấy phép thử có không gian mẫu là 6 biến cố đồng khả năng xảy ra trong đó có 3 biến cố thuận lợi cho A .

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Bài 2: Trong hộp gồm có 6 bi màu trắng, 4 bi màu đen. Tìm xác suất để lấy từ hộp ra được:

- a) 2 viên bi màu đen;
- b) 3 viên bi màu trắng.

Giải

Gọi A là biến cố lấy từ hộp ra được 2 viên bi màu đen và B là biến cố lấy từ hộp ra 3 viên bi màu trắng.

$$\text{Ta có: a) } P(A) = \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} \approx 0,133$$

$$\text{b) } P(B) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{20}{120} \approx 0,167$$

Bài 3: Rút ngẫu nhiên từ một bộ bài tú lơ khơ có 52 lá ra 5 lá. Tìm xác suất sao cho trong 5 lá rút ra có:

- a) 2 lá đỏ và 3 lá đen;
- b) 2 con rô, 1 con cơ, 2 con chuồn.

Giải

Gọi A là biến cố rút ra được 2 lá đỏ và 3 lá đen.

B là biến cố rút ra được 2 con rô, 1 con cơ, 2 con chuồn.

Số biến cố thể xảy ra khi rút 5 lá bài là: C_{52}^5

a) Số biến cố thuận lợi cho A là: $C_{26}^2 C_{26}^3$

$$P(A) = \frac{C_{26}^3 C_{26}^2}{C_{52}^5} = \frac{845000}{2598960} = 0,3251$$

b) Số biến cố thuận lợi cho B là: $C_{13}^2 C_{13}^1 C_{13}^2$.

BÀI TẬP

Bài 1: Với các chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

- a) Có thể lập ra bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau;
- b) Chọn một số tự nhiên đó. Tính xác suất số tự nhiên đó là số chẵn.

Bài 2: Một nhóm học sinh gồm 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh.

Tính xác suất để:

- a) Cả 4 học sinh được chọn đều là nam;
- b) Bốn học sinh được chọn là 2 nam và 2 nữ.

Bài 3: Gieo đồng thời hai con xúc xắc. Tìm xác suất để:

- a) Tổng số xuất hiện trên hai con là 7;
- b) Tổng số nốt xuất hiện trên hai con là 8;
- c) Số nốt xuất hiện trên hai con hơn kém nhau 2.

Bài 4: Trong hộp gồm có 6 bi đen và 4 bi trắng. Rút ngẫu nhiên từ hộp ra 2 bi.

Tính xác suất để được:

- a) Hai bi đen;
- b) Ít nhất một bi đen.

Bài 5: Một học sinh đi thi chỉ thuộc 25 câu hỏi trong số 30 câu hỏi. Mỗi học sinh đi thi phải rút ra 3 câu hỏi. Tính xác suất:

- a) Học sinh đó trả lời được ba câu;
- b) Học sinh đó trả lời ít nhất một câu.

ÔN TẬP CHƯƠNG II



Bài 1: Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5.

- a) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ gồm 3 chữ số khác nhau;
- b) Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau và số tự nhiên đó chia hết cho 5.

Bài 2: Hãy tìm:

a) Số hạng thứ 6 trong khai triển: $(3 - x)^{10}$

b) Tìm hệ số của số hạng thứ 4 trong khai triển: $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^{15}$

Bài 3: Một hộp chứa 4 cái thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ:

- a) Mô tả không gian mẫu;
- b) Xác định các biến cố sau:
A: “Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn”
B: “Tích các số trên hai thẻ là chẵn”.

Bài 4: Một học sinh đi thi chỉ thuộc 25 câu hỏi trong số 30 câu hỏi. Mỗi học sinh đi thi phải rút ra 4 câu hỏi. Tính xác suất:

- a) Học sinh đó trả lời được 4 câu hỏi;
- b) Học sinh đó trả lời ít nhất 2 câu hỏi.

❧ PHẦN HÌNH HỌC ❧**MỤC LỤC**

CHƯƠNG I. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN.	29
QUAN HỆ SONG SONG	29
§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG	29
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG	37
§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG	40
§4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG	42
§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT	45
HÌNH KHÔNG GIAN.....	45
ÔN TẬP CHƯƠNG I	47

CHƯƠNG I. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

A. LÝ THUYẾT

I. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

1. Các khái niệm: Trong không gian các yếu tố cơ bản gồm: Điểm – Đường thẳng – Mặt

- Kí hiệu của điểm thường là các chữ in hoa như: A; B; C...

- Kí hiệu đường thẳng là các chữ thường như: a; b; c; d...

Mặt phẳng: Hình dung như là mặt bảng, mặt bàn, mặt nước yên lặng của một bể bơi,...

Mặt phẳng không có giới hạn. Kí hiệu mặt phẳng: (P); (Q); (α); (β); ...

2. Các kí hiệu qui ước

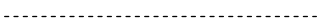
- Điểm A thuộc đường thẳng d hay thuộc mặt phẳng (α), kí hiệu: $A \in d$ hay $A \in (\alpha)$.

- Điểm A không thuộc đường thẳng d hay không thuộc mặt phẳng (α), kí hiệu: $A \notin d$ hay $A \notin (\alpha)$.

- Đường thẳng d chứa trong mặt phẳng (β), kí hiệu: $d \subset (\beta)$.

- Đường thẳng d không chứa trong mặt phẳng (β), kí hiệu: $d \not\subset (\beta)$.

3. Hình biểu diễn của một hình lên không gian

Hình	Hình biểu diễn trong không gian
Đường thẳng	Đường thẳng
Đoạn thẳng	Đoạn thẳng
Hai đường thẳng song song	Hai đường thẳng song song
Hai đường thẳng cắt nhau	Hai đường thẳng cắt nhau
Điểm A thuộc đường thẳng a	Điểm A' thuộc đường thẳng a' (a' là hình biểu diễn của a)
Đường trông thấy	
Đường bị che khuất	

II. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN CỦA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1) Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

2) Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng cho trước.

3) Tồn tại bốn điểm không cùng nằm trên một mặt phẳng.

4) Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả các điểm chung của của 2 mặt phẳng đó.

Đường thẳng này được gọi là *giao tuyến của hai mặt phẳng đó*.

5) Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

III. CÁCH XÁC ĐỊNH MẶT PHẪNG

1) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua 3 điểm không thẳng hàng.

- 2) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng và 1 điểm không thuộc đường thẳng đó.
 3) Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua 2 đường thẳng cắt nhau.

Kí hiệu: - Mặt phẳng đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C: mặt phẳng (ABC).

- Mặt phẳng đi qua đường thẳng a và điểm $A \notin a$: mặt phẳng (a; A).

- Mặt phẳng đi qua đường thẳng cắt nhau a và b: mặt phẳng (a; b).

IV. KHÁI NIỆM VỀ HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

1. Hình chóp

Cho đa giác $A_1A_2...A_n$ và điểm S nằm ngoài mp(P) chứa đa giác. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$. Hình tạo bởi n tam giác: $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ và đa giác gọi là *hình chóp*. Kí hiệu: $SA_1A_2..., A_n$.

- S là đỉnh của hình chóp.

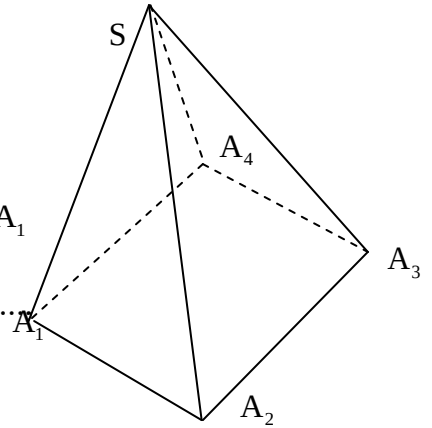
- Đa giác $A_1A_2...A_n$ và các điểm trong nó: mặt đáy.

Các cạnh của đa giác: cạnh đáy.

- Các đoạn thẳng: $SA_1, SA_2, ..., SA_n$: cạnh bên.

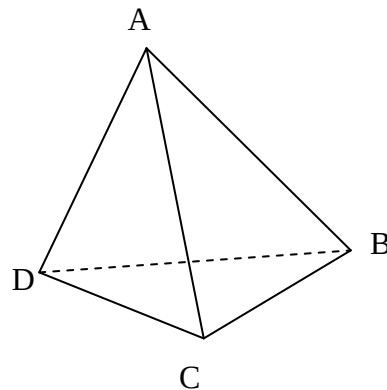
Mỗi tam giác và điểm trong nó: $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là mặt bên.

- Nếu đáy của hình chóp là tam giác, tứ giác, ngũ giác, ... thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác, ...



2. Hình tứ diện

Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng (tức là không cùng nằm trên một mặt phẳng). Hình gồm 4 tam giác ABC, ACD, ADB, BDC gọi là *hình tứ diện* (Tứ diện).



I. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Đang 1: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (loại 1)

Phương Pháp: Tìm điểm chung của hai mặt phẳng đó, đường thẳng nối hai điểm chung đó là giao tuyến hai mặt phẳng cần tìm.

Ví dụ 1: Cho tứ giác ABCD với AB không song song CD. Gọi $S \notin (ABCD)$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

a) (SAC) và (SBD);

b) (SAB) và (SCD).

Giải

a) Tìm $(SAC) \cap (SBD)$:

$$* S \in (SAC) \cap (SBD) \quad (1)$$

$$* \text{Gọi } O = AC \cap BD$$

$$\left. \begin{array}{l} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{array} \right\} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

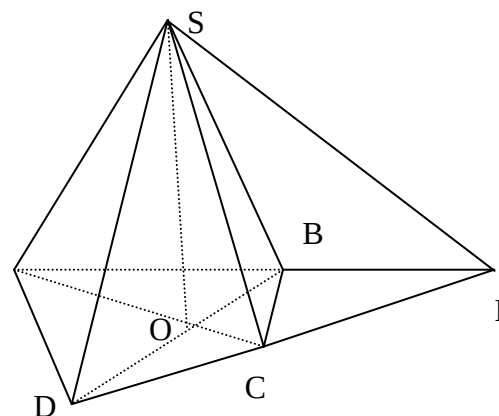
b) Tìm $(SAB) \cap (SCD)$:

$$* S \in (SAB) \cap (SCD) \quad (3)$$

$$* \text{Trong mp } (ABCD): AB \nparallel CD \Rightarrow AB \cap CD = I$$

$$\left. \begin{array}{l} I \in AB \subset (SAB) \\ I \in CD \subset (SCD) \end{array} \right\} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD) \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $SI = (SAB) \cap (SCD)$.



BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

- Tìm giao tuyến của (ICB) và (KAD);
- Gọi M, N là 2 điểm lấy trên 2 đoạn AB và AC. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (IBC) và (DMN).

Bài 2. Cho 2 hình thang ABCD và ABEF có chung đáy lớn AB và không đồng phẳng.

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACE) và (BFD);
- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (BCE) và (ADF).

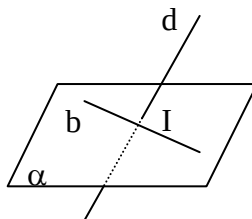
Bài 3. Cho tam giác ABC và điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:

- (SMN) và (ABC);
- (SAN) và (SCM).

Bài 4. Cho 2 hình thang ABCD và ABEF có chung đáy lớn AB và không đồng phẳng.

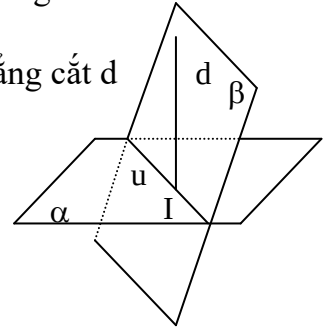
- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACE) và (BFD);
- Xác định giao tuyến của mặt phẳng (BCE) và (ADF).

Dạng 2: Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng



☛ Phương pháp:

- ✓ *Trường hợp 1:* Nếu trong mặt phẳng (α) có chứa một đường thẳng b cắt d tại I thì I chính là giao điểm của d và (α)
- ✓ *Trường hợp 2:* Nếu trong mặt phẳng (α) không chứa đường thẳng cắt d
 - Chọn mặt phẳng phụ (β) chứa d
 - Tìm giao tuyến Δ của (α) và (β)
 - Trong mặt (β) tìm giao điểm $I = \Delta \cap d$
 - I chính là giao điểm cần tìm của d và α .



Ví dụ 2: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC.

Lấy điểm $K \in BD$ sao cho K không là trung điểm của BD.

- a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNK);
- b) Tìm giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNK).

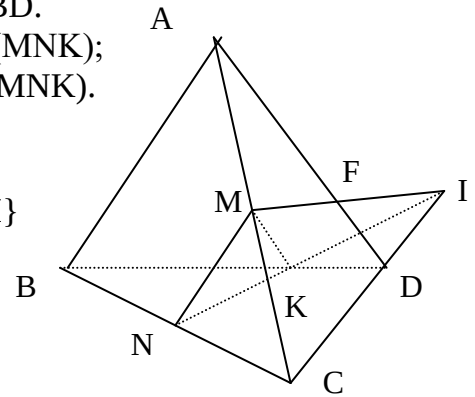
Giải

- a) Tìm $CD \cap (MNK)$:

- * Trong mp(BCD) có $NK \not\parallel CD$ nên $NK \cap CD = \{I\}$
- * $NK \subset mp(MNK)$ và $NK \cap CD = \{I\}$
- $\Rightarrow CD \cap (MNK) = \{I\}$

- b) Tìm $AD \cap (MNK)$:

- * Chọn mặt phẳng phụ (ACD) chứa AD.
- * Xác định giao tuyến của (ACD) và (MNK):
 - + $M \in (MNK)$ và $M \in AC \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \cap (MNK)$
 - + $I \in NK \subset (MNK)$ và $I \in CD \subset (ACD) \Rightarrow I \in (ACD) \cap (MNK)$
 - $\Rightarrow (ACD) \cap (MNK) = MI$
- * Trong mặt phẳng (ACD) có $MI \cap AD = \{F\}$
- Vậy: $AD \cap (MNK) = \{F\}$.



BÀI TẬP

Bài 1. Cho tứ giác ABCD, ABEF không đặc sắc và không đồng phẳng.

- a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (ADF) và (BCE);
- b) M là một điểm trong đoạn EF. Tìm giao điểm của CE và (ABM).

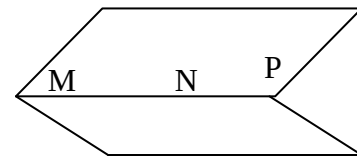
Bài 2. Cho hình chóp SABCD, với đáy là hình vuông. M, N, P, R lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, SC. Q thuộc AD sao cho $\frac{QD}{QA} = \frac{1}{3}$. Tìm giao điểm của AR và các mặt phẳng: (SCD); (SQM); (SDM); (SQN); (SDN); (SQP).

Bài 3. Cho 4 điểm S, A, B, C không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA và AB. Trên đoạn SC ta lấy điểm K sao cho $CK = 3KS$.

- a) Tìm giao điểm của đường thẳng BC và (HIK);
- b) Gọi M là trung điểm của đoạn IH. Tìm giao điểm của đoạn thẳng KM với mặt phẳng (ABC).

Dạng 3: Chứng minh ba điểm M, N, P thẳng hàng**Phương pháp:**

- * Chứng minh ba điểm M, N, P cùng thuộc hai mặt phẳng (α) và (β)
 - * Suy ra M, N, P thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β)
- Vậy chúng thẳng hàng.



Ví dụ 3: Cho hình chóp S.ABC. Trên cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $MN \cap AB = I$, $NP \cap BC = J$, $MP \cap AC = K$. Chứng minh ba điểm I, K, J thẳng hàng.

Giải

Ta có: $I \in MN, MN \subset (MNP) \Rightarrow I \in (MNP)$;

$I \in AB, AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC)$.

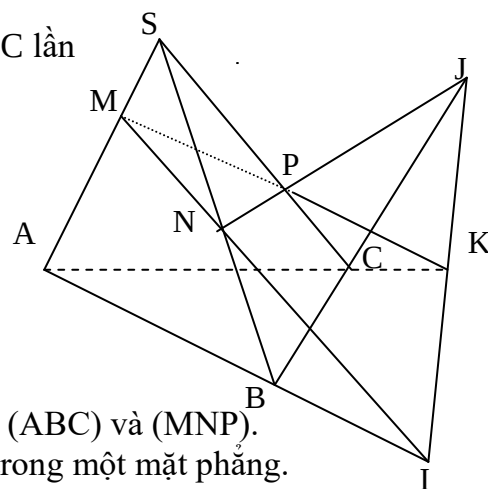
$\Rightarrow I \in (ABC) \cap (MNP)$.

Tương tự: I, K cũng là điểm chung của hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) .

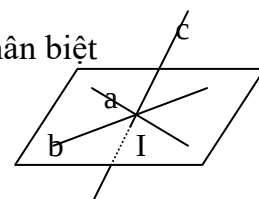
Lại có: Hai tam giác ABC và MNP không cùng nằm trong một mặt phẳng.

$\Rightarrow$ Hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) là hai mặt phẳng phân biệt.

Vậy I, K, J nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng phân biệt (ABC) và (MNP) hay I, K, J thẳng hàng.

**Dạng 4: Chứng minh ba đường thẳng a, b, c đồng quy****Phương pháp:**

- Gọi $\{I\} = a \cap b$
 - Chứng minh $I \in c$ (I thường là điểm chung của 2 mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa a, b và nhận c là giao tuyến)
- Vậy 3 đường thẳng a, b, c đồng quy tại điểm I.

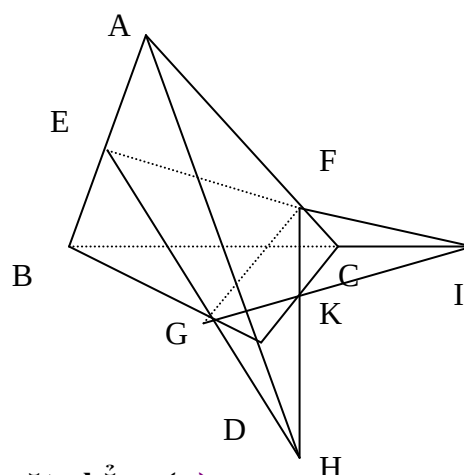


Ví dụ 4: Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho $EF \cap BC = I$, $EG \cap AD = H$.

- Tìm giao tuyến (EFG) và (BCD);
- Chứng minh IG, HF và CD đồng quy.

Giải

- a) $(EFG) \cap (BCD) = IG$
 b) Gọi $\{K\} = HF \cap CD$
 $K \in HF \subset (EFG)$ và $K \in CD \subset (BCD)$
 $\Rightarrow K \in (BCD) \cap (EFG)$
 Mà $(EFG) \cap (BCD) = IG$
 $\Rightarrow K \in IG$ (đpcm).



Dạng 5: Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (α)

Phương pháp: Xác định tất cả các đoạn giao tuyến của (α) và các mặt hình chóp. Trong mặt phẳng (α) các đường giao tuyến này khép kín thành một hình đa giác, đó là thiết diện cần tìm.

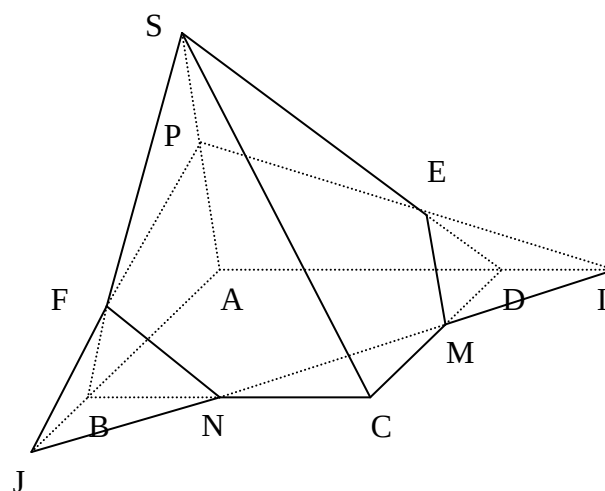
Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của CD, BC và SA.

Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Hướng dẫn

- MN cắt AD, AB tại I, J.
- IP cắt SD tại E
- JP cắt SB tại F

Suy ra ngũ giác MNFPE là thiết diện.



BÀI TẬP

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G là 3 điểm trên AB, AC, BD sao cho (EF) cắt (BC) tại I, (EG) cắt (AD) tại H. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (EFG) với 2 mặt phẳng (BCD) và (ACD).
2. Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.
 - a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ICB) và (KAD);
 - b) Gọi M, N là 2 điểm lấy trên 2 đoạn AB và AC. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (IBC) và (DMN).
3. Cho 2 hình thang ABCD và ABEF có chung đáy lớn AB và không đồng phẳng.
 - a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ACE) và (BFD);
 - b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (BCE) và (ADF).
4. Cho tam giác ABC và điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:
 - a) (SMN) và (ABC);
 - b) (SAN) và (SCM).
5. Trong mặt phẳng (∞) cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$, $AB > CD$). Điểm S nằm ngoài (∞). Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng:
 - a) (SAC) và (SBD);
 - b) (SAD) và (SBC);
 - c) Điểm M thuộc SB. Tìm giao tuyến của (ADM) và (SAC).
6. Cho tứ giác ABCD, ABEF không đặc sắc và không đồng phẳng.
 - a) Tìm giao tuyến của (ADF) và (BCE);
 - b) M là một điểm trong đoạn EF. Tìm giao điểm của (ABM) và (CE).
7. Cho hình chóp SABCD. Với đáy là hình vuông. M, N, P, R là trung điểm của AB, BC, CD, SC. Q thuộc AD sao cho: $\frac{QD}{QA} = \frac{1}{3}$. Tìm giao điểm của AR và các mặt phẳng: (SCD); (SQM); (SDM); (SQN); (SDN); (SQP).
8. Cho hình chóp SABCD với đáy là hình chữ nhật. Trên cạnh SA, SB, SC lấy các điểm M, P, R. Bên trong các tam giác SAB, SBC, SCD lấy các điểm N, Q, T. Tìm giao điểm của (ABCD) và các đường thẳng sau: MN, MR; MP; MT; MQ; NQ; NT.
9. Cho hình chóp SABCD với ABCD là hình bình hành. M, N, P, K là các điểm trên SA, SB, SD, AB sao cho: $\frac{MA}{MS} = \frac{NB}{NS} = \frac{PS}{PD} = \frac{KA}{KB} = \frac{1}{2}$. I thuộc AC, J là điểm ở bên trong tam giác ABD. Dựng giao điểm của SC và các mặt phẳng (ANP); (KNP); (MNP); (AKP); (INP); (JNP).

10. Cho 4 điểm S, A, B, C không cùng nằm trong mặt phẳng. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA và AB. Trên đoạn SC ta lấy điểm K sao cho $CK = 3KS$.
- Tìm giao điểm của đường thẳng BC và (HIK);
 - Gọi M là trung điểm của đoạn IH. Tìm giao điểm của đường thẳng KM với (ABC)
11. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là 2 điểm của AB, CD. Trên AD lấy M sao cho $AM = \frac{3}{4}AD$. Tìm thiết diện do mặt phẳng (IJM) cắt tứ diện.
12. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. G là trọng tâm của $\triangle SAC$, I là trung điểm của CD, J là trung điểm của SD.
- Tìm giao điểm của (GI) và (SAD);
 - Tìm thiết diện do mặt phẳng (CGI) cắt hình chóp.
13. Cho hình thang ABCD trong mặt phẳng (α) và điểm S ở ngoài (α) ($AB \parallel CD$, $AB > CD$).
- Tìm giao tuyến (d) của (SAC) và (SBD) và giao tuyến (d') của (SAD) và (SBC);
 - Tìm các giao điểm của mặt phẳng (d, d') với AB, CD và nói rõ vị trí của chúng trên các đoạn ấy.
14. Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng.
- E, F là 2 điểm lần lượt nằm trong các đoạn BC, AD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (BCF) và (ADE).
 - Ba điểm M, N, P lần lượt nằm trong các đoạn AB, AC, CD với $MA = 2MB$, $NC = 2NA$. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (BCF) và (MNP).

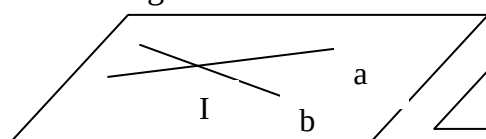
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

I. LÝ THUYẾT

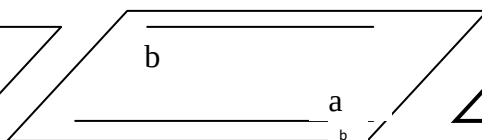
1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

☞ **Trường hợp 1:** Hai đường thẳng đồng phẳng

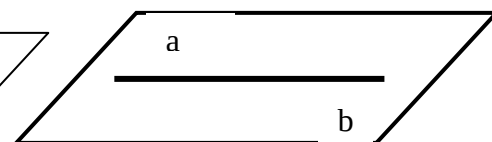
- Cắt nhau
- Song song
- Trùng nhau



$$\{I\} = a \cap b$$



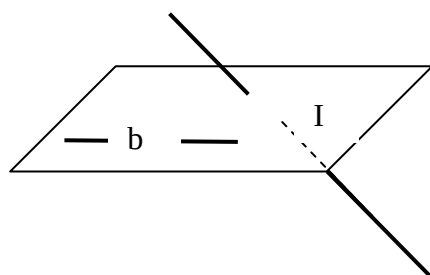
$$a // b$$



$$a \equiv b$$

Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng cùng nằm trong mặt phẳng và không có điểm chung.

☞ **Trường hợp 2:** Hai đường thẳng không thể cùng nằm trong một mặt phẳng (Hai đường thẳng không đồng phẳng) gọi là hai đường thẳng chéo nhau.



a

2. TÍNH CHẤT

Định lý 1: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

$$\begin{cases} a // c \\ b // c \end{cases} \Rightarrow a // b$$

Định lý 2: Trong không gian qua một điểm không cùng nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Định lý 3: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc song song.

$$\begin{cases} a = (\alpha) \cap (\beta) \\ b = (\alpha) \cap (\gamma) \\ c = (\gamma) \cap (\beta) \end{cases} \text{ thì } a // b // c \text{ hoặc } a, b, c \text{ đồng quy}$$

Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó.

$$\left\{ \begin{array}{l} a // b \\ a \subset \alpha, b \subset \beta \Rightarrow \Delta // a // b \\ \alpha \cap \beta = \Delta \end{array} \right.$$

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song (loại 2)

Phương pháp: Cho 2 mặt phẳng $(P) \neq (Q)$: $a \subset (P), b \subset (Q), a // b$. Nếu (P) và (Q) cắt nhau thì ta xác định giao tuyến như sau:

- Tìm một điểm chung của (P) và (Q) .
- Giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng qua điểm chung đó và song song với a và b

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của các mặt phẳng (SAB) và (SCD) , (SBC) và (SAD) .

Giải

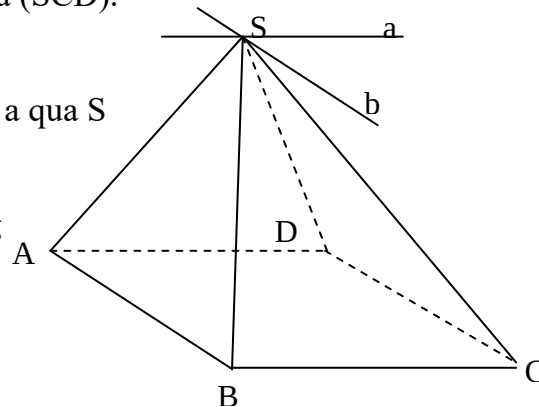
- Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) :

Ta có: S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) .

$$AB \subset (SAB); CD \subset (SCD); AB // CD$$

$\Rightarrow$ giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng a qua S song song với AB và CD .

- Tương tự xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) .



BÀI TẬP

1. Cho điểm O nằm ngoài mặt phẳng của hình bình hành $ABCD$. Gọi I là điểm bất kì trên OA . Mặt phẳng (BIC) cắt OD tại M .

- Chứng minh IM song song với AD và BC ;
- IB và MC cắt nhau tại N . Chứng minh ON song song với AB và CD .

2. Cho 2 hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không đồng phẳng.

- Chứng minh $CE // DF$;

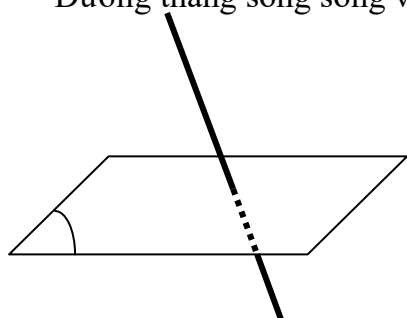
- b) Gọi M, N là điểm lần lượt trên AC và AD sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AD}$. Gọi H, K là 2 điểm lần lượt trên BF và AF sao cho $\frac{FH}{FB} = \frac{FK}{FA}$. Chứng minh $MN \parallel HK$.
3. Cho hình bình hành ABCD và điểm S ở ngoài (ABCD).
- Xác định giao tuyến $(\Delta) = (SAB) \cap (SCD)$;
 - Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SB. H là một điểm trên đoạn SD. HM và HN cắt mặt phẳng (ABCD) tại E và F. Chứng minh $EF \parallel CD$.
 - Xác định hình tính của thiết diện tạo bởi hình chóp S.ABCD và (HMN)
4. Cho hình bình hành ABCD. Ta có S là một điểm ở ngoài (ABCD).
- Xác định giao tuyến của 2 mặt phẳng (SAD) và (SBC);
 - Gọi M là một điểm trên SC. Tìm giao tuyến của 2 mặt phẳng (MAB) và (SCD).
5. Cho tứ diện ABCD có $AD = BC = 10a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BD, AC.
- Thiết diện do (MNP) cắt tứ diện là hình gì?
 - Cho thêm $NP = 8a$. Tính diện tích thiết diện ấy.
6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là một hình thang ($AD \parallel BC$, $AD > BC$). Gọi G, Trong lần lượt là trọng tâm của $\triangle SAB$, $\triangle SCD$. Một điểm M trên SB thỏa $SM < \frac{SB}{2}$.
- Tìm giao điểm của (GMT) với (SC);
 - Tìm thiết diện do (GMT) cắt hình chóp.
7. Cho hình chóp S. ABCD đáy là hình bình hành tâm O.
- Xác định giao tuyến của (SAC) và (SBD);
 - Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC);
 - Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SC = 3SM$. Xác định hình tính của thiết diện tạo bởi (MAD) và hình chóp S.ABCD;
 - Xác định giao điểm I của AM và (SBD). Chứng minh rằng: I là trung điểm của SO.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG SONG SONG

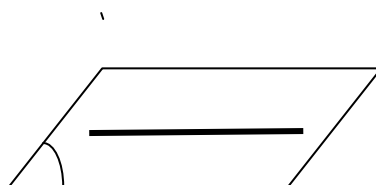
I. LÝ THUYẾT

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

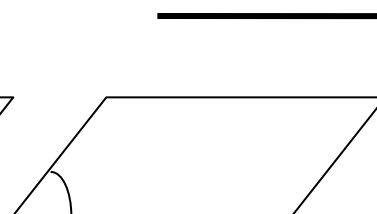
- Đường thẳng cắt mặt phẳng tại một điểm
- Đường thẳng chứa trong mặt phẳng
- Đường thẳng song song với mặt phẳng



$$d \cap (\alpha) = I$$



$$d \subset (\alpha)$$



$$d // (\alpha)$$

Đường thẳng d và mặt phẳng (α) không có điểm chung. Khi đó, ta nói đường thẳng d song song mặt phẳng (α) . Kí hiệu: $d // (\alpha)$.

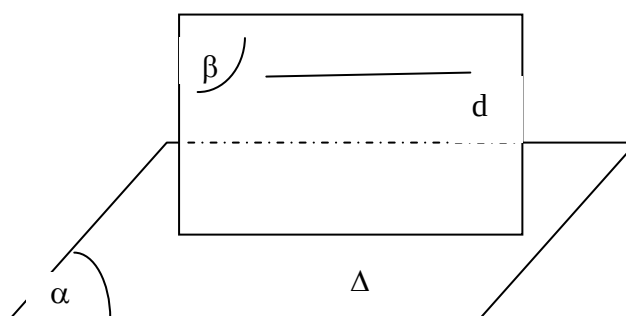
2. TÍNH CHẤT

Định lý 1: Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với d' nằm trong (α) thì d song song với (α) .

$$\left. \begin{array}{l} d \not\subset (\alpha) \\ d // a \\ a \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow d // (\alpha)$$

Định lý 2: Cho một đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) . Nếu mặt phẳng (β) chứa d và cắt (α) theo giao tuyến Δ thì Δ song song với d .

$$\left\{ \begin{array}{l} d // (\alpha) \\ d \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \end{array} \right. \Rightarrow d // \Delta$$



Định lý 3: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\beta) // a \\ (\alpha) // a \\ \alpha \cap \beta = \Delta \end{array} \right. \Rightarrow \Delta // a$$

Định lý 4: Cho hai đường thẳng chéo nhau, có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng: Chứng minh đường thẳng song song mặt phẳng

Phương pháp: Để chứng minh $d \parallel (P)$ (d không nằm trong (P)), ta cần chứng minh:

$$\exists a \subset (P) : a \parallel d.$$

Ví dụ 1: Cho tứ diện ABCD, với G là trọng tâm của tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MC = 2MB$. Chứng minh: $MG \parallel (ACD)$.

Giải

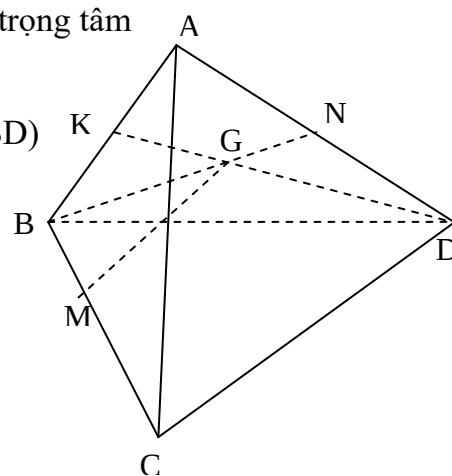
Gọi K, N lần lượt là trung điểm của cạnh AB, AD. Vì G là trọng tâm của tam giác ABD nên K, G, D thẳng hàng.

Ta có: $\frac{KG}{KD} = \frac{1}{3}$ (1) (tính chất trọng tâm trong tam giác ABD)

Lại có: $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$ (2) (giả thiết)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{KG}{KD} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow MG \parallel CD$.

Từ đó: $MN \parallel CD, CD \subset (ACD) \Rightarrow MN \parallel (ACD)$.



BÀI TẬP

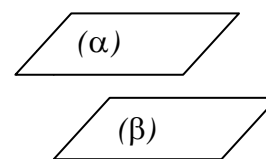
- Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và tam giác ACD. Chứng minh MN song song với (BCD) và (ABC).
- Cho hình thang ABCD có đáy lớn AD. Gọi M là một điểm trên cạnh AB. S là một điểm ở ngoài mặt phẳng (ABCD). Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với BC, (P) cắt SA, SD, CD lần lượt tại N, E, F. Tứ giác MNEF là hình gì?
- Cho tứ diện ABCD. Mặt phẳng (P) song song với hai cạnh đối AB và CD cắt BC, AC, AD và DB tại M, N, E, F. Tứ giác MNEF hình gì?
- Cho hình chóp SABCD với đáy ABCD là hình bình hành
 - Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC);
 - Lấy điểm M tùy ý trên cạnh SC ($M \neq S$). Mặt phẳng (ABM) cắt SD tại N. Tứ giác ABMN là hình gì?
- Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng.
 - Gọi O, O' lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh rằng OO' song song với (ADF) và (BCE);
 - Gọi M, N là trọng tâm của $\triangle ABD$ và $\triangle ABE$. Chứng minh rằng $MN \parallel (CEF)$.
- Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA. Chứng minh rằng SB và SC đều song song với (MNP).

§4. HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

I. LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là *song song* với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Kí hiệu: $(\alpha) // (\beta)$



2. Điều kiện để hai mặt phẳng song song

Định lý: Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q) .

$$\left. \begin{array}{l} a, b \subset (P) \\ a \cap b = I \\ a, b // (Q) \end{array} \right\} \Rightarrow (P) // (Q)$$

3. Tính chất

Tính chất 1: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Hệ quả 1: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \neq (\beta) \\ (\alpha) // (P) \\ (\beta) // (P) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$$

Hệ quả 2: Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì đường thẳng nào nằm trong mặt này sẽ song song với mặt kia.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) // (\beta) \\ a \subset (\alpha) \end{array} \right. \Rightarrow a // (\beta)$$

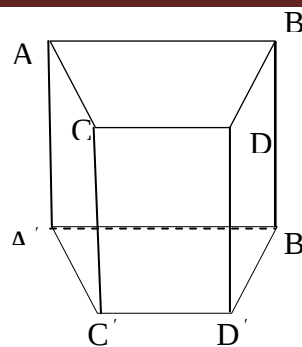
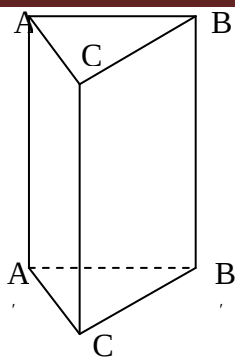
Tính chất 2: Nếu hai mặt phẳng song song cùng cắt mặt phẳng thứ ba thì hai đường giao tuyến đó song song.

$$\left\{ \begin{array}{l} (P) // (Q) \\ (R) \cap (P) = a \\ (R) \cap (Q) = b \end{array} \right. \Rightarrow a // b$$

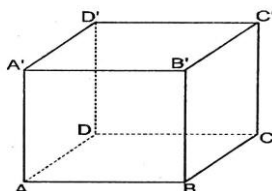
4. HÌNH LĂNG TRỤ-HÌNH HỘP-HÌNH CHÓP CỤT

Hình lăng trụ: là một hình đa diện có hai mặt nằm trong hai mặt phẳng song song gọi là hai đáy và tất cả các cạnh không thuộc hai đáy đều song song với nhau.

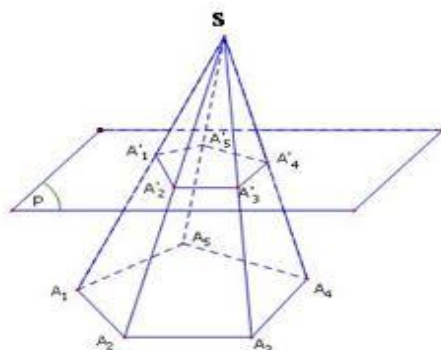
Tùy theo đa giác đáy, ta có hình lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác,...



Hình hộp: Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là *hình hộp*.



Hình chóp cắt: Cho hình chóp $SA_1A_2A_3...A_n$. Mặt phẳng (P) song song với đáy của hình chóp cắt các cạnh bên $A_1'A_2'...A_n'$. Hình tạo bởi mặt đáy của hình chóp cùng thiết diện $A_1'A_2'...A_n'$ và các cạnh bên $A_1A_1'; A_2A_2'...A_nA_n'$ gọi là *hình chóp cắt*.



II. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Dạng: Chứng minh hai mặt phẳng song song

☞ Phương pháp: Để chứng minh $(P) \parallel (Q)$ ta cần chứng minh:

Cách 1: Trong (P) (hoặc (Q)) có hai đường thẳng cắt nhau a và b sao cho $a \parallel (Q)$, $b \parallel (Q)$ (hoặc $a \parallel (P)$, $b \parallel (P)$).

Cách 2: Có $a, b \subset (P)$, a cắt b ; $a', b' \subset (Q)$: a' cắt b' và $a \parallel a', b \parallel b'$.

Ví dụ 1: Cho tam giác ABC nằm trong mặt phẳng (P) . Trên ba nửa đường thẳng Ax , By , Cz cùng nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) lần lượt lấy các điểm A' , B' , C' sao cho $AA' = BB' = CC'$. Chứng minh: $(P) \parallel (A'B'C')$.

Giải

Vì $Ax \parallel Bz$, $AA' = BB'$ nên $ABB'A'$ là hình bình hành.

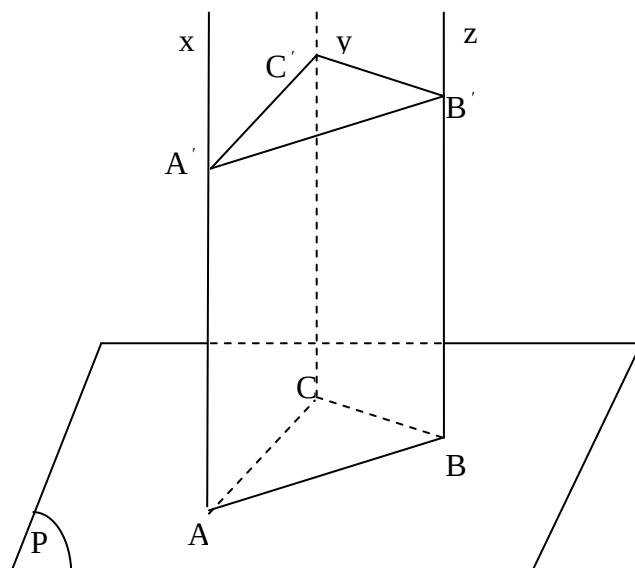
$$\Rightarrow A'B' \parallel AB \quad (1)$$

Vì $Ax \parallel Cy$, $AA' = CC'$ nên $ACC'A'$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow A'C' \parallel AC \quad (2)$$

Mặt khác: AB, AC thuộc mặt phẳng (ABC) . $A'B', A'C'$ thuộc mặt phẳng $(A'B'C')$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $(A'B'C') \parallel (P)$.



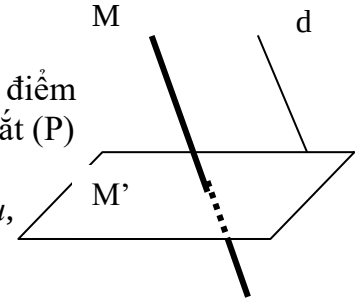
BÀI TẬP

- Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là điểm ở ngoài mặt phẳng (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của OA, OB, OC.
 - Chứng minh rằng $(HIK) \parallel (ABCD)$;
 - Gọi G là giao điểm (HIK) và OD. Chứng minh rằng $GK \parallel CD$ và $GH \parallel AD$.
- Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC. Trên 3 nửa đường thẳng Ax, By, Cz song song với nhau, không đồng phẳng với (α) và cùng nằm một phía với (α) ta lấy các điểm A', B', C' sao cho $AA' = BB' = CC'$. Chứng minh rằng $(\alpha) \parallel (A'B'C')$.
- Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về cùng một phía đối với (α) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (α') cắt 4 nửa đường thẳng trên tại A', B', C', D'.
 - Chứng minh rằng $(AA', BB') \parallel (CC', DD')$;
 - Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành;
 - Chứng minh rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$.
- Cho hình chóp SABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.
 - Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$;
 - Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Chứng minh rằng $PQ \parallel (SBC)$.
- Cho 2 hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy 2 điểm M và N sao cho: $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BF} = \frac{1}{3}$. Các đường thẳng song song với AB kẻ M và N lần lượt cắt AD và AF ở P và Q.
 - Chứng minh $(ADF) \parallel (BCE)$;
 - Chứng minh $(MNPQ) \parallel (CDFE)$.

§5. PHÉP CHIẾU SONG SONG. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

1. Phép chiếu song song

Cho mặt phẳng (P) và một đường thẳng d cắt (P). Với mỗi điểm M trong không gian, đường thẳng qua M song song với d cắt (P) tại M' được gọi là *hình chiếu song song* của điểm M trên mặt (P) theo phương d. Mặt (P) gọi là *mặt phẳng chiếu*, phương d gọi là *phương chiếu*.



Định nghĩa: Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với hình chiếu M' của nó trên (P) được gọi là *phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương d*.

2. Các tính chất

Tính chất 1: Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng

Hệ quả: Hình chiếu song song của một tia là một tia, của một đoạn thẳng là một đoạn thẳng.

Tính chất 2: Hình chiếu song song của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

Tính chất 3: Hình chiếu song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng hoặc song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một hình không gian

Ta thường vẽ các hình không gian như hình chóp, hình lăng trụ, ... trên bảng hay trên trang giấy, các hình vẽ đó gọi là *hình biểu diễn của một hình không gian trên mặt phẳng*.

Định nghĩa: Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của $\mathcal{H}$ lên một mặt phẳng nào đó theo một phương chiếu nào đó.

Các yêu cầu đối với một hình biểu diễn

❖ *Hình biểu diễn phải đúng:* các tính chất của hình không thay đổi qua phép chiếu song song đều giữ nguyên trên hình biểu diễn.

❖ *Hình biểu diễn phải nổi:*

Tam giác là hình biểu diễn của tam giác bất kì (đều, cân, vuông).

Hình bình hành là hình biểu diễn cho các hình như hình bình hành, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông bất kì.

Hình Elíp là để biểu diễn cho đường tròn.

BÀI TẬP

1. Cho ABCD là một tứ diện đều cạnh a. Hai trung điểm của CB, CD là I, M. Trên đoạn AB và AI lấy N, P với $AN = \frac{2}{3}a$ và $AP = \frac{a}{\sqrt{3}}$.
 - a) Chứng minh rằng giao tuyến của (NPD) với (BCD) là một đường thẳng vuông góc với (CD);
 - b) Tìm thiết diện do (MNP) cắt tứ diện.
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành.
 - a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC);
 - b) Gọi E, F là hai điểm lần lượt ở trong các đoạn SA, SC với $SF = \frac{1}{3}SC$. Trung điểm của SB là K. Tìm giao tuyến của (EFK) và (SAD).
3. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J, K, L, T, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.
 - a) Chứng minh rằng IJ, KL, TS đồng quy tại một điểm đặc biệt đối với 3 đoạn ấy;
 - b) Nếu ABCD là tứ diện đều có cạnh a, tính khoảng cách từ điểm đồng quy ấy đến các đỉnh A, B, C, D.
4. Cho hình chóp đỉnh S, có đáy ABCD là một hình thang ($AB \parallel CD$, $AB = 2CD$).
 - a) M là trung điểm của AB. Chứng minh $MC \parallel (SAD)$;
 - b) I, J lần lượt là trung điểm của AD, SC. Chứng minh $(IJ) \parallel (SAB)$.
5. Cho ABCD và ABEF là 2 hình thang có chung cạnh đáy AB và không đồng phẳng. Hai trọng tâm của $\triangle ADF$ và $\triangle BCE$ là K, L.
 - a) Chứng minh $(KL) \parallel (ABC)$ và $(KL) \parallel (ABE)$;
 - b) M là trung điểm của DF. Tìm giao tuyến của (MKL) với (BCD).

ÔN TẬP CHƯƠNG I



1. Cho tứ diện ABCD. Gọi M là một điểm trong đoạn AC.
 - a) Tìm thiết diện do mặt phẳng (α) cắt tứ diện bởi (α) qua M và song song với 2 cạnh AB, CD;
 - b) I, J là các trung điểm của AB, CD. Tìm giao điểm của IJ với (α) .
2. Cho hình chóp SABCD (ABCD là tứ giác lồi). Trong đoạn BC lấy điểm M.
 - a) (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SA), (CD). Tìm thiết diện do (α) cắt hình chóp;
 - b) N là một điểm trong đoạn CD. Tìm giao tuyến của (SAN) với (α) .
3. Cho hình chóp S, đáy ABCD là hình bình hành. Các trung điểm của SC, SD là M, N.
 - a) Chứng minh AM, BN cắt nhau tại một điểm T và $ST \parallel (ABCD)$;
 - b) (α) là mặt phẳng qua trung điểm E và SA, song song với (DC) và (BM). Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) .
4. Cho 2 hình vuông ABCD, ABEF không đồng phẳng có cạnh bằng 2a. Trung điểm của DF là M. Trên tia đối của tia MA lấy điểm I. IJ là một đoạn thẳng có độ dài bằng a và song song với 2 mặt phẳng (BCD), (BEF). Tìm các giao tuyến do mặt phẳng (DEJ) cắt mặt phẳng (BCD) và mặt phẳng (BEF).
5. Cho 2 đường thẳng chéo nhau: (a), (b). Trên đó lần lượt lấy hai điểm A, B. Mặt phẳng qua (b) và song song với (a) là (α) .
 - a) Tìm giao tuyến (d) của (α) và mặt phẳng (AB, a);
 - b) Trên (a), (b), (d) lần lượt lấy C, D, E sao cho $AC = BE = 2l$, $BD = l$ (l là độ dài cho sẵn). Lấy thêm trên (a), (b) hai điểm M, N di động sao cho $AM = 2AN$. Chứng minh MN luôn song song với mặt phẳng (CDE).
6. Cho hai hình bình hành ABCD, ABEF không đồng phẳng. M, N là 2 điểm lần lượt trên AE, BD sao cho $AM = \frac{1}{3}AE$, $BN = \frac{1}{3}BD$. Điểm I ở trong BC.
 - a) Chứng minh $(EI) \parallel (ADF)$;
 - b) Chứng minh $(MN) \parallel (CDE)$.
7. Cho mặt phẳng (P). Hai đường thẳng (d) và (d') chéo nhau cắt (P) tại A và B. Đường thẳng (D) di động và song song với (P) cắt (d) tại M, cắt (d') tại N. Từ M và N vẽ 2 đường thẳng (Δ) , (Δ') lần lượt song song với (d) và (d'), cắt (P) tại E và F.
 - a) Chứng minh rằng $(AME) \parallel (BNF)$;
 - b) Chứng minh rằng $AE \parallel BF$;
 - c) Chứng minh rằng AMNF là hình bình hành.